Uitwerkingen H10 Integraalrekening

1. De tweede benadering is de beste.
a. Onder de grafiek liggen nog witte vlakdelen.
b. Boven de grafiek steken blauwe vlakdelen uit.
c. Neem bijvoorbeeld 5 rechthoeken.

2. Als je de ondersom gaat tekenen , dan is de hoogte van het eerste rechthoekje gelijk aan de functiewaarde bij $x = 0{,}4$. Het tweede rechthoekje heeft een hoogte die gelijk is aan de functiewaarde bij $x = 0{,}8$ enz.
Als je de bovensom gaat tekenen dat is de hoogte van het eerste rechthoekje gelijk aan de functiewaarde bij $x = 0$ en het 2^e rechthoekje heeft de hoogte gelijk aan de functiewaarde bij $x = 0{,}4$ enz..

3. Gegeven $f(x) = 8 - x^3$

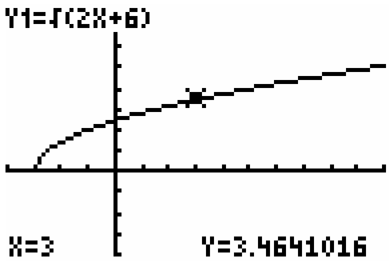
$\Delta x = 0{,}4 \Rightarrow$ Op het interval [0,2] zijn er dus 5 rechthoeken.
Het midden is bij $x = 0{,}2$; 0,6 ; 1,0 ; 1,4 en bij 1,8.
$O(V) = f(0{,}2) \,.\, 0{,}4 + f(0{,}6) \,.\, 0{,}4 + \ldots + f(1{,}8) \,.\, 0{,}4 =$

$$0{,}4.\sum_{n=0}^{4} f(0{,}2+0{,}4n) = 0{,}4.\sum_{n=0}^{4}\left(8-(0{,}2+0{,}4n)^3\right)$$

Voer in : nMin = 0 ; $u_n = (8 - (0{,}2+0{,}4.n)^3\ ).0{,}4$; u_nMin = 3.196.. ;
v(n) = v(n-1) + u en v_nMin = 3.196
De gevraagde Riemansom is v(4) ≈ 12,08

Natuurlijk kan je ook gewoon de functie waarden berekenen enz. ⇒
O(V) = (7,992 + 7,784 + 7 + 5,256 + 2,168) . 0,4 = 12,08

4. Gegeven $f(x) = \sqrt{(2x + 6)}$



De breedte van een rechthoek is 0,5.
We krijgen :

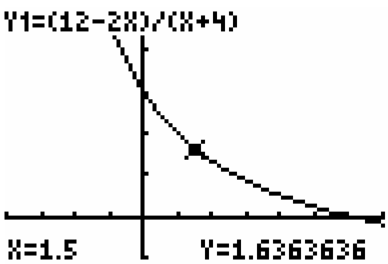
$$O_{ondersom} = \left(f(-3)+f(-2{,}5)+\ldots\ldots+f(-0{,}5)\right)0{,}5 =$$

(0 + 1 + 1,4142 + 1,7321 + 2 + 2,2361).(0,5) ≈ 4,1912

$$O_{bovensom} = \left(f(-2{,}5)+f(-2)+f(-1{,}5)+f(-1)+f(-0{,}5)+f(0)\right).0{,}5 =$$

(1 + 1,4142 + 1,7321 + 2 + 2,2361 + 2,4495).0,5 ≈ 5,4160 ⇒
4,1912 < O(V) < 5,4160

5. Gegeven $f(x) = \dfrac{12-2x}{x+4}$ Zie figuur:



a. Bij de Riemansom hebben we steeds de middens nodig.
Het interval is hier [0 , 6] en $\Delta x = 1 \Rightarrow$ 6 rechthoeken.
⇒ Het midden bij 0,5 , 1,5 ; 2,5 ; …….5,5

$$\Rightarrow O(V) = \left(f(0{,}5)+f(1{,}5)+f(2{,}5)+f3{,}5)+f(4{,}5)+f(5{,}5)\right).1$$

≈ (2,444 +1,636 + 1,077 + 0,667 + 0,353 + 0,105) ≈ 6,282

Anders: O(V) = $\sum_{n=0}^{5} f(0,5+1.n).1 = 1.\sum_{n=0}^{5}\left(\dfrac{12-2(0.5+n)}{(0.5+n)+4}\right)$

Voer in : nMin = 0 ; u_n = ((12-2(0.5+n))/(4.5+n); u_nMin = 2,4444.. ;
v(n) = v(n-1) + u en v_nMin = 2,4444
De gevraagde Riemansom is v(4) ≈ 6,28

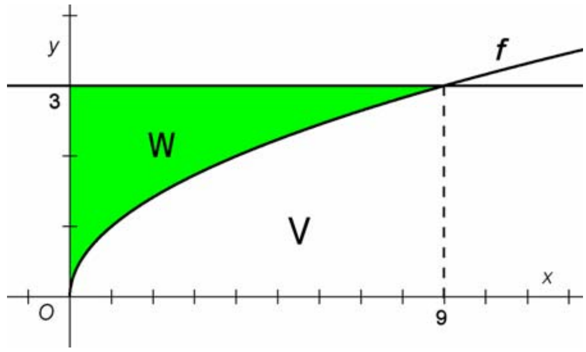
b. $O_{\text{ondersom}} = \big(f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)\big).1$ =
(3 + 2 + 1,333 + 0,857 + 0,5 + 0,222 + 0).1 ≈ 4,91
$O_{\text{bovensom}} = ((f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)).1 \approx 7{,}91 \Rightarrow$
4,91 ≤ O(V) ≤ 7,91

6.
a. Dan wordt de oppervlakte gehalveerd.
b. Naarmate de verdeling steeds fijner wordt , wordt het verschil tussen de boven en de ondersom steeds kleiner. Het verschil gaat zelfs naar 0. Dit komt doordat Δx oneindig klein wordt.

7. $\sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9$
Voer in : $y_1 = \sqrt{x}$

$O(W) = 3\cdot 9 - O(V) = 27 - \int_0^9 \sqrt{x}\cdot dx =$

27 – fnInt(y_1,x,0,9) = 27 – 18,00= 9,00

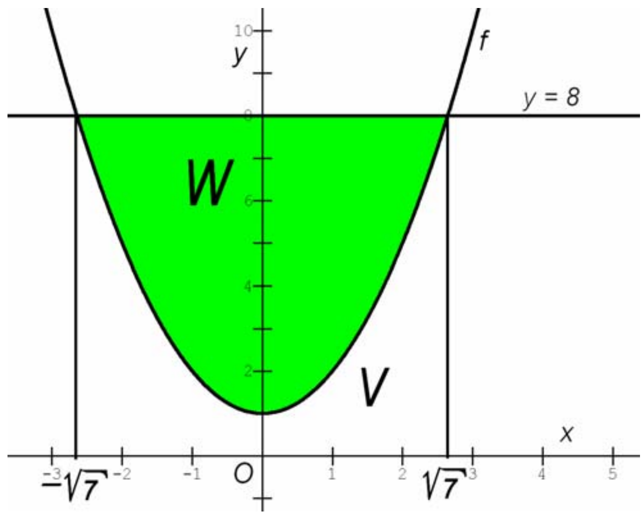


8. Gegeven $f(x) = x^2 + 1$

Voer in $y_1 = x^2 + 1$
$x^2 + 1 = 8 \Leftrightarrow \quad x^2 = 7 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{7}$

$O(W) = 8\cdot 2\sqrt{7} - \int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} (x^2+1)\cdot dx \approx$

16√ 7 – fnInt(y_1,x , -√ 7,√ 7) =
16√ 7 - 17 , 6383 ≈ 24,69

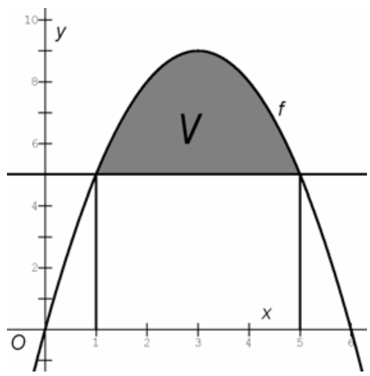


9. Gegeven: $f(x) = 6x - x^2$

Voer in
$y_1 = 6x - x^2; \;\; y_2 = 5$
Calc intersect geeft voor x: 1 en 5.

$O(V) = \int_1^5 f(x)\,dx - 4\cdot 5$ =

fnInt(y_1,x , 1,5) – 20 ≈ 10,67



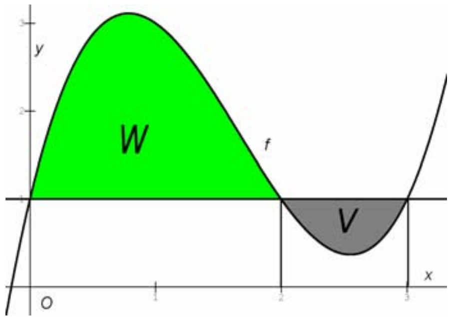
10.

a. Voer in

$y_1 = x^3 - 5x^2 + 6x + 1;\quad y_2 = 1$

Gelijkstellen geeft (calc. intersect of algebraïsch) geeft voor x: 0, 2 en 3.

$O(V) = 1 \cdot 1 - \int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 1 - \text{fnInt}(y_1,\ x,\ 2,\ 3) \approx 0{,}42$



b. $O(W) = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x - 1 \cdot 2 = \text{fnInt}(y_1,\ x,\ 0,\ 2) - 2 \approx 2{,}67$

11.

a. Voer in: $y_1 = 10x - x^2$ en $y_2 = x + 8$

O(U) = fnInt(y_1,x , 1 , 8) = $144\frac{2}{3}$

O(V) = fnInt (y_2 , x , 1 , 8) = 87,5

b. O(W) = O(U) – O(V) ≈ 57,17

c. Voer in $y_3 = y_1 - y_2 \Rightarrow \int_1^8 y_3 dx = fnInt(y_3, x, 1, 8) \approx 57{,}17$ Geeft dus hetzelfde resultaat.

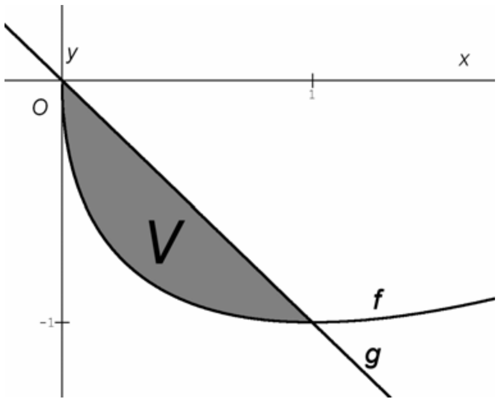
12.

a. Voer in:

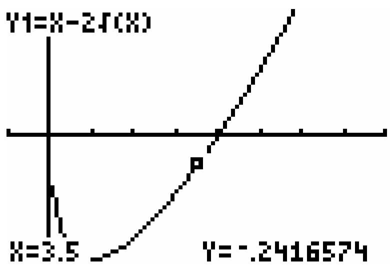
$y_1 = x - 2\sqrt{x} \quad ; \quad y_2 = -x$

Gelijkstellen geeft voor x: 0 en 1

$O(V) = \int_0^1 (y_2 - y_1) \cdot \mathrm{d}x \approx fnInt(y_2 - y_1, x, 0, 1) \approx 0{,}33$



b. Zie figuur.



Snijpunt met de x-as. ⇒

$x = 2\sqrt{x} \Rightarrow x^2 = 4x \Leftrightarrow$

$x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$ (voldoen allebei)

$\Rightarrow$ O(W) = $\int_0^4 (0 - y_1) dx = fnInt(0 - y_1, x, 0, 4) \approx 2{,}67$

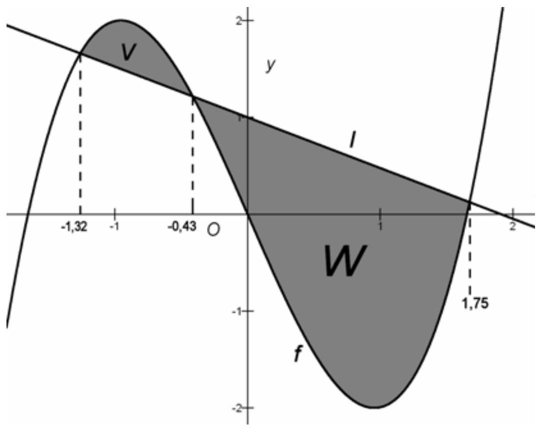
13.

Voer in:

$y_1 = x^3 - 3x$; $\quad y_2 = 1 - \frac{1}{2}x$

Calc intersect geeft voor x achtereenvolgens:

-1,32001; -0,43232; 1,75233



$$O(V) = \int_{-1,32001}^{-0,43232} \left(f(x) - g(x) \right) \cdot \mathrm{d}x =$$

$$fnInt(y_1 - y_2, x, -1.32001, -0.43232) \approx 0,30644$$

$$O(W) = \int_{-0,43232}^{1,75233} \left(g(x) - f(x) \right) \cdot \mathrm{d}x =$$

$$fnInt(y_2 - y_1, x, -0.43232, 1.75233) \approx 3,44084$$

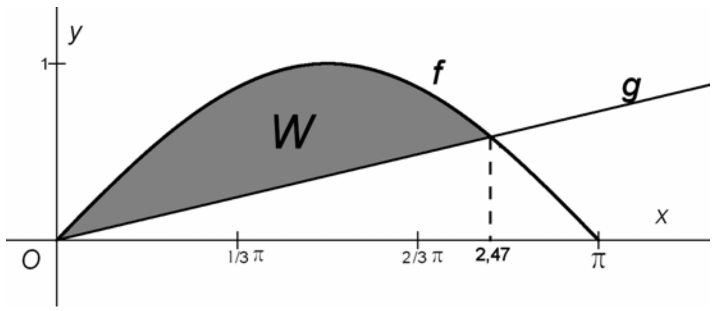
$\Rightarrow$ O(V) + O(W) $\approx$ 0,30644 + 3,44084 $\approx$ 3,75

14.

Voer in:

$y_1 = \sin(x)$; $\quad y_2 = 0,25x$

Calc intersect geeft voor x: 2,4758



$$\int_0^{\pi} \sin(x) \cdot \mathrm{d}x = fnInt(\sin x, x, 0, \pi) = 2$$

$$O(W) = \int_0^{2,47458} \left(y_1 - y_2 \right) \cdot \mathrm{d}x$$

$$fnInt(y_1 - y_2, x, 0, 0.247458) \approx 1,02023$$

en dit is niet de helft van O(V)=2.

Dus de lijn deelt V ***niet*** in delen met gelijke oppervlakte.

15. Voer in : $y_1 = \sin(x)$

a. O(V) = $\int_0^{\pi} f(x)dx = fnInt(y_1, x, 0, \pi) = 2$

O(W) = $\int_{\pi}^{2\pi} (0 - \sin x)dx = fnInt(-y_1, x, 0, \pi) = 2$

b. $\int_0^{2\pi} f(x) \cdot \mathrm{d}x = fnInt(y_1, x, 0, 2\pi) = 0$ Dat komt omdat de uitkomst van de integraal negatief is als f onder de x-as ligt.

c. $\int_0^{2\pi} \left| f(x) \right| \cdot \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \mathrm{abs}(\sin(x)) \cdot \mathrm{d}x = fnInt(abs(\sin(x)), x, 0, 2\pi) = 4$

Uitkomst is de totale oppervlakte van V en W.

16.

Voer in : $y_1 = x^3 - 5x^2 + 6x$; $\quad O(\text{2 gebieden}) = \text{fnInt}(\text{abs}(y_1),\ x,\ 0,\ 3) \approx 3,08$

17. Voer in : y_1 = abs(($x^3 - 3x$) – ($1 - 0{,}5x$)),x , -1.32001 , 1.75233) ≈ 3,75
Door weer de absolute waarde te nemen van de verschilfuncties, zorg je er steeds voor dat de uitkomsten van de integralen positief zijn. De 2 oppervlakten worden dus opgeteld.

18. Voer in $y_1 = x^5 - 5x^3 + 7x$ en $y_2 = 2x - 1$
Met de optie intersect vinden we de twee buitenste snijpunten namelijk :
$x \approx -1{,}96$ en $x \approx 1{,}83$ (De twee middelste snijpunten hebben we niet nodig !!!)
Nu geldt : O(totaal) = $\int_{-1,96}^{1,83} abs(y_1 - y_2).dx = fnInt(abs(y_1 - y_2), x, -1.96, 1.83) \approx 5{,}48$

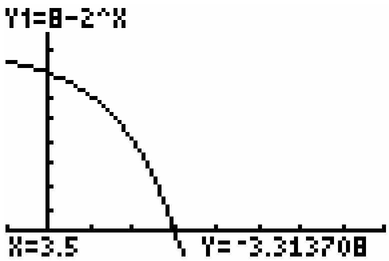
19. Gegeven $f(x) = x^2 + 10$ met $0 \leq x \leq 6$

a. Nu tussen 2 en 4 ⇒ straal is $f(3) = 19$ ⇒ Inhoud = $\pi .19^2.2 = 722\pi$
Tussen 4 en 6. ⇒ straal is $f(5) = 35$ ⇒ Inhoud = $\pi . 35^2.2 = 2450\pi$

b. De benadering is nu : $242\pi + 722\pi + 2450\pi = 3414\pi$

20. Gegeven $f(x) = 8 - 2^x$

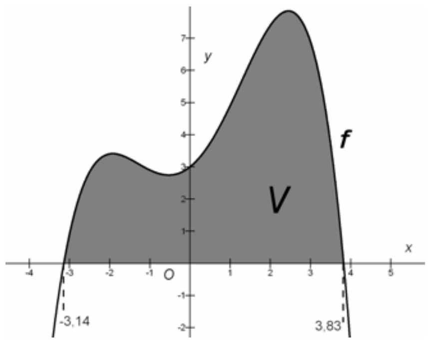
Zie figuur.
Snijpunt met y-as is (0,8) en met de x-as: (3 , 0)



Voer in $y_1 = \pi .(8 - 2^x)^2$ ⇒
$I(V) = \int_0^3 \pi(8 - 2^x)^2 dx =$
=fnInt(y_1 , x , 0, 3) ≈ 238,33

21.

Voer in: $y_1 = -0{,}1x^4 + x^2 + x + 3$
Calc zero geeft voor x: -3,13978; 3,82864.
$I(L) = \text{fnInt } (\pi \cdot y_1^2,\ x,\ -3.13978,\ 3.82864) \approx \boxed{487{,}49}$



22. Gegeven $f(x) = 9 - x^2$ en l : $y = 2x + 6$

Snijpunten ⇒ $2x + 6 = -x^2 + 9 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -3$.
⇒ De punten (-3,0) en (1,8) .
Voer in $y_1 = \pi .(9 - x^2)^2$ en $y_2 = \pi .(2x + 6)^2$.
We hebben ook nog het rechtersnijpunt nodig. ⇒ $9 - x^2 = 0$ ⇒ $x = 3$

$\Rightarrow$ Inhoud = $\int_{-3}^{1} y_2 dx + \int_{1}^{3} y_1 dx = fnInt(y_2, x, -3, 1) + fnInt(y_1, x, 1, 3) =$

268,0826 + 170,9026 ≈ 438,99

23. Gegeven $f(x) = 2 + \dfrac{3}{x}$ en de lijnen y = 2 ; x = 1 en x = 3.

a. $f(x) = 2 + \dfrac{3}{x} \xrightarrow{T(0,-2)} g(x) = \dfrac{3}{x}$

b. Voer in $y_1 = \dfrac{3}{x}$ en $y_2 = \pi \cdot y_1^2$ $\Rightarrow$ Inhoud = $\int_{1}^{3} y_2 dx = fnInt(y_2, x, 1, 3)$ = 18,85

De inhoud verandert niet als alles 2 naar beneden wordt verschoven.

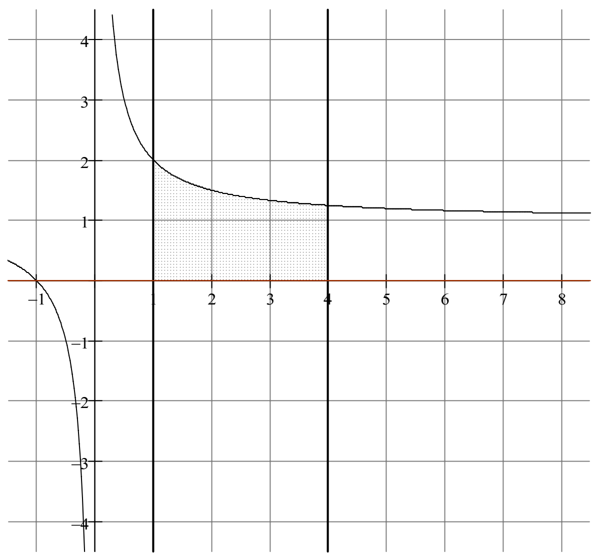
24. Gegeven $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ en de lijnen y = 1 ; x = 1 en x = 4

a. Wentelen om de x-as.
Zie figuur.

Voer in $y_1 = f(x)$ en $y_2 = 1$
en $y_3 = \pi \cdot y_1^2 - \pi \cdot y_2^2$

$\Rightarrow$ Inhoud = $\int_{1}^{4} y_3 dx = fnInt(y_3, x, 1, 4)$

≈ 11,07



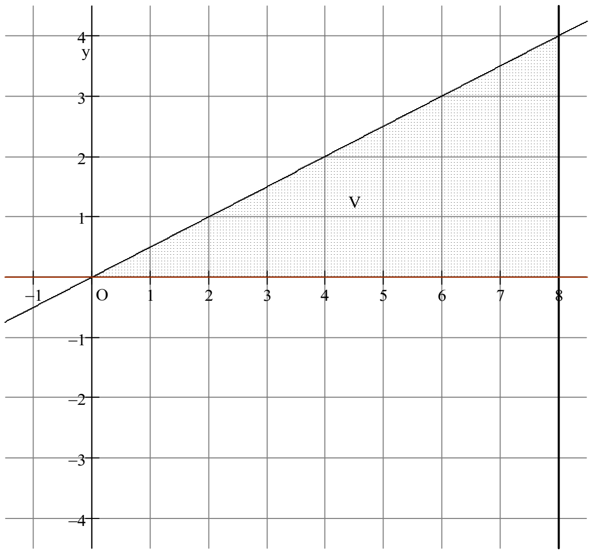
b. Nu wentelen om de lijn y = 1

Eerst transleren $\Rightarrow$ $f(x) = \dfrac{x+1}{x} = 1 + \dfrac{1}{x} \xrightarrow{T(0,-1)} g(x) = \dfrac{1}{x}$

Nu $g(x)$ wentelen om de x-as. $\Rightarrow$ Voer in $y_1 = \dfrac{1}{x}$ en $y_2 = \pi \cdot y_1^2$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Inhoud = $\int_{1}^{4} y_2 dx = fnInt(y_2, x, 1, 4) \approx 2{,}36$

25. Gegeven l : y = 0,5x ; de x-as en de lijn x = 8



a. Voer in : $y_1 = 0,5x$ en $y_2 = \pi \cdot y_1^2 \Rightarrow$

$$I(V) = L = \int_0^8 y_2 dx = fnInt(y_2, x, 0, 8)$$

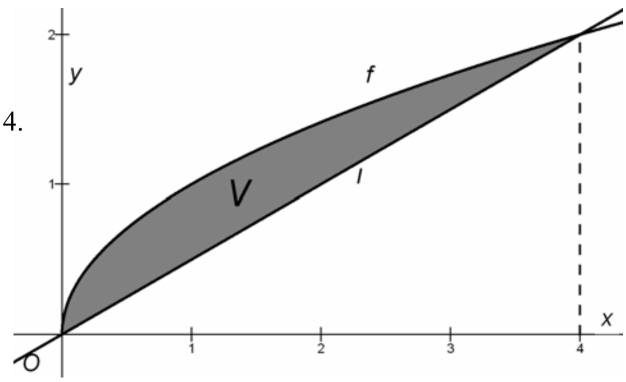
$\approx 134,04$

b. Nu W is ingesloten door l en de y-as en de lijn y = 4
Goed kijken in de figuur.
I(W) = inhoud cilinder – I(V)
inhoud cilinder is $\pi \cdot 4^2 \cdot 8 \approx 402,12$
$\Rightarrow$ M = I(W) = 402,12 – 134,04 ≈ 268,08

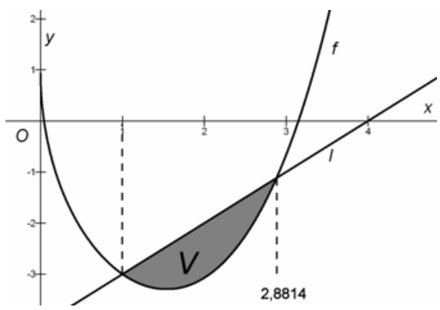
26. Als V gaat wentelen om de x-as dan is de inhoud het verschil van de twee omwentelingscilinders.
De grote cilinder heeft de straal 2 en lengte 5 $\Rightarrow$ I(cilinder groot) = $\pi \cdot 2^2 \cdot 5 = 20\pi$
De kleine cilinder heeft straal 1 en lengte 5. $\Rightarrow$ I(cilinder klein) = $\pi \cdot 1^2 \cdot 5 = 5\pi$
$\Rightarrow$ De gevraagde inhoud is dus $20\pi - 5\pi = 15\pi$

27.

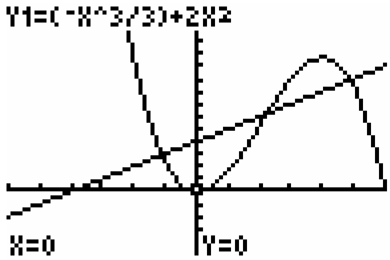
Voer in:
$y_1 = \sqrt{x}$; $y_2 = \frac{1}{2}x$; Calc intersect geeft voor x: 0 en 4.
$I(L) = \text{fnInt}(\ \pi(y_1^2 - y_2^2),\ x,\ 0,\ 4) \approx 8,4$



28.
Voer in:
$y_1 = 2^x - 5\sqrt{x}$; $y_2 = 5 - x$.
Calc intersect geeft $x = 1$ en $x \approx 2,8814361$
$I(L) = \text{fnInt}(\ \pi(y_1^2 - y_2^2),\ x,\ 1,\ 2.8814361) \approx 20,9$



29. Gegeven $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2$ en $g(x) = x + 4$

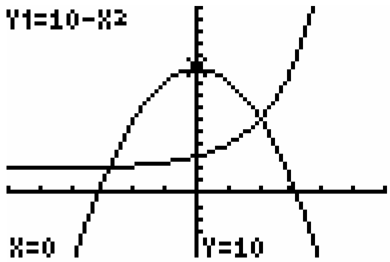


Zie de figuur.
Eerst de twee functies invoeren en met intersect de snijpunten bepalen ⇒
$x \approx -1{,}1055 \vee x \approx 2{,}2235 \vee x \approx 4{,}8820$
⇒ De gevraagde som van de inhouden is :
I(som) =

$$\int_{-1{,}1055}^{2{,}2235} \pi y_1^2 dx - \int_{-1{,}1055}^{2{,}2235} \pi y_2^2 dx + \int_{2{,}2235}^{4{,}8820} \pi y_2^2 dx - \int_{2{,}2235}^{4{,}8820} \pi y_1^2 dx =$$

$= \text{fnInt}(\ \pi(y_2^2 - y_1^2),\ x,\ -1.1055,\ 2.2235)\ + \text{fnInt}(\ \pi(y_1^2 - y_2^2),\ x,\ 2.2235,\ 4.8820) \approx$
$\approx 155{,}879\ + 266{,}445 \approx 422{,}32$

30. Gegeven : $f(x) = 10 - x^2$ en $g(x) = 2^{x+2}$



Zie figuur.

a. Voer in $y_1 = f(x)$ en $y_2 = g(x)$
Met intersect krijgen we de snijpunten bij
$x \approx -3{,}0869$ en $x = 1{,}1262$
$I(L) = \text{fnInt}(\ \pi(y_1^2 - y_2^2),\ x, -3.0869\ ,1.1262\ )\ \approx\ 682{,}59$

b. Nu wentelen om de lijn y = 10 ⇒ Alles 10 naar beneden transleren. ⇒ Voer in $y_1 = -x^2$ en $y_2 = 2^{x+2} - 10$
Verder blijkt dat we y_1 en y_2 moeten wisselen.
De *x*-coördinaten blijven hetzelfde. ⇒
I(M) = $I(L) = \text{fnInt}(\ \pi(y_2^2 - y_1^2),\ x, -2.8030\ ,\ 2)\ \approx\ 569{,}80$

31.

a. Hier heeft f een grotere afstand tot de *x*-as dan g(*x*). ⇒ De *x*-as kan liggen vanaf het minimum van g en dan verder omlaag.

b. Nu is het net andersom. De *x*-as kan liggen vanaf het maximum van *f* en verder omhoog.

32. $f(x) = ax + b$

a. O(*p*) = oppervlakte rechthoek + oppervlakte driehoek =
b.p + 0,5.*p* . (*ap*+ *b* – *b*) = *bp* + 0,5.*p.ap* = 0,5ap^2 + *bp*

b. O'(*p*) = *ap* + *b* . Dit is de vergelijking van de functie *f*.

33. $f(x) = 3x^2$

a.

p	1	2	3	4	5
O(*p*)	1	8	27	64	125

b. Voor alle waarden van *p* is de oppervlakte gelijk aan p^3.

c. $\dfrac{dO}{dP} = 3p^2$ en dat is gelijk aan de vergelijking van de gegeven functie.

d. Uit c volgt dat O(p) = p^3 Als de oppervlakte van 0 naar p 10 is dan moeten we dus uitkomen bij $p = \sqrt[3]{10}$

34.

a. $F(x) = (x^2+1)^6 + 1 \Rightarrow F'(x) = 6.(x^2+1)^5.2x = 12x(x^2+1)^5 = f(x) \Rightarrow$
F is een primitieve van *f*.

b. $G(x) = \left(\tfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\right)e^{2x} - 2 \Rightarrow G'(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x} + \left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\right).e^{2x}.2 = \dfrac{1}{2}e^{2x} + x.e^{2x} - \dfrac{1}{2}e^{2x} = x.e^{2x} \Rightarrow$
G is een primitieven van *g*.

c. $H(x) = 2\ln(x) + \ln^2(x) + 3 \Rightarrow H'(x) = \dfrac{2}{x} + 2.\ln(x).\dfrac{1}{x} = \dfrac{2+2\ln(x)}{x} \Rightarrow$
H is een primitieve van *h*.

d. $J(x) = \dfrac{e^{3x}-10}{2e^x} - 4 \Rightarrow J'(x) = \dfrac{e^{3x}.3.2e^x - 2e^x.(e^{3x}-10)}{4e^{2x}} = \dfrac{6e^{4x} - 2e^{4x} + 20e^x}{4e^{2x}} =$
$\dfrac{4e^{4x}+20e^x}{4e^{2x}} = \dfrac{e^{3x}+5}{e^x} \Rightarrow$ J is een primitieve van *j*.

35.

a. $F(x) = \dfrac{1}{5}x^5 \Rightarrow F'(x) = x^4 \Rightarrow$ F is dus een primitieven van $f(x) = x^4$

b. $G(x) = \dfrac{1}{4}e^{4x+1} \Rightarrow G'(x) = \dfrac{1}{4}e^{4x+1}.4 = e^{4x+1} \Rightarrow$ G is dus een primitieven van $g(x) = e^{4x+1}$

c. $H(x) = \dfrac{3^x}{\ln(3)} \Rightarrow H'(x) = \dfrac{1}{\ln(3)}.3^x.\ln(3) = 3^x \Rightarrow$ H is dus een primitieven van $h(x) = 3^x$

d. $J(x) = x.\ln(x) \Rightarrow J'(x) = 1.\ln(x) + x.\dfrac{1}{x} = \ln(x) + 1 \Rightarrow$ J is een primitieven van $j(x) = \ln(x) + 1$

36.

a.

$F(x) = \frac{a}{n+1}\cdot x^{n+1} + c \Rightarrow \quad F'(x) = \frac{a}{n+1}\cdot(n+1)\cdot x^n = a\cdot x^n = f(x)$
Gevolg: *F* is een primitieve van *f*.

Als *n* = -1 is de noemer van de coëfficiënt van F gelijk aan nul: dat mag niet.

b. $F(x) = \dfrac{g^x}{\ln(g)} \Rightarrow F'(x) = \dfrac{1}{\ln(g)}.g^x.\ln(g) = g^x = f(x) \Rightarrow$ **F is een primitieve van *f*.**

c. $F(x) = e^x + c \Rightarrow F'(x) = e^x = f(x) \Rightarrow$ F is een primitieve van *f*.

d. $F(x) = \ln|x| + c \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{x} = f(x) \;\Rightarrow$ F is een primitieve van *f*.

e. $F(x) = x\ln(x) - x + c \Rightarrow F'(x) = 1.\ln(x) + x.\frac{1}{x} - 1 = \ln(x) = f(x) \Rightarrow$ F is een primitieve van *f*.

f.

$$F(x) = \frac{1}{\ln(g)}.(x\ln(x) - x) + c \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{\ln(g)}.(1.\ln(x) + x.\frac{1}{x} - 1) = \frac{1}{\ln(g)}.\ln(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(g)} = {}^{g}\log(x)$$

$\Rightarrow$ F is een primitieve van *f*.

37.

a. Bij *n* = -1 is de noemer dan 0 en dat mag niet.

b. De primitieve van x^{-1} is $y = \ln|x|$ +c want bij differentiëren krijg je x^{-1}

c. Stel G(*x*) = $a.F(x)$ dan geldt G'(*x*) = $a.F'(x) = a.f \;\Rightarrow\; a.F$ is een primitieven van *a.f*

38.

a. $f(x) = 6x^2 \Rightarrow F(x) = 6 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot x^3 + c = \boxed{2x^3 + c}$

b. $f(x) = 2x^3 + 5x^4 \Rightarrow F(x) = 2 \cdot \tfrac{1}{4} \cdot x^4 + 5 \cdot \tfrac{1}{5} x^5 + c = \boxed{\tfrac{1}{2} x^4 + x^5 + c}$

c. $f(x) = \frac{x^4 - 2x}{2x^3} = \frac{x^4}{2x^3} - \frac{2x}{2x^3} = \frac{1}{2}x - x^{-2} \;\Rightarrow\; F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{-1} x^{-1} + c = \boxed{\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{x} + c}$

d. $f(x) = 10^x \Rightarrow F(x) = \boxed{\frac{10^x}{\ln(10)} + c}$

e. $f(x) = 5 \cdot 2^x \Rightarrow F(x) = 5 \cdot \frac{2^x}{\ln(2)} + c = \boxed{\frac{5 \cdot 2^x}{\ln(2)} + c}$

f. $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^4} = \frac{x^3}{x^4} + \frac{2}{x^4} = \frac{1}{x} + 2.x^{-4} \Rightarrow F(x) = \ln|x| - \frac{2}{3}x^{-3} + c = \ln|x| - \frac{2}{3x^3} + c$

39.

a. $f(x) = x^3 - 3x \Rightarrow F(x) = \frac{1}{4} \cdot x^4 - 3 \cdot \frac{1}{2} x^2 + c = \boxed{\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + c}$

b. $f(x) = 5e^x \Rightarrow F(x) = 5e^x + c$

c.

$$g(x)=\frac{x^4-6}{2x^3}=\frac{x^4}{2x^3}-\frac{6}{2x^3}=\frac{1}{2}x-3x^{-3}\Rightarrow$$
$$G(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2-3\cdot\frac{1}{-2}x^{-2}+c=\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+c=\boxed{\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2x^2}+c}$$

d. $f(x)=3^x+x^3\Rightarrow F(x)=\dfrac{3^x}{\ln(3)}+\dfrac{1}{4}x^4+c$

e. $f(x)=2\ln(x)\Rightarrow F(x)=2.(x\ln(x)-x)+c=2x\ln(x)-2x+c$

f. $f(x)=\ln(2x)=\ln(x)+\ln 2\Rightarrow F(x)=x\ln(x)-x+x.\ln(2)+c$

40.

a. $f(x)=e^{x+1}\Rightarrow F(x)=e^{x+1}+c$

b. $f(x)=\dfrac{8}{x^3}=8.x^{-3}\Rightarrow F(x)=.x^{-2}.(-4)+c=-\dfrac{4}{x^2}+c$

c.

$$f(x)=\frac{-x^2+2x+3}{x^4}=\frac{-x^2}{x^4}+\frac{2x}{x^4}+\frac{3}{x^4}=-x^{-2}+2x^{-3}+3x^{-4}\Rightarrow$$
$$F(x)=x^{-1}+2\cdot\tfrac{1}{-2}\cdot x^{-2}+3\cdot\tfrac{1}{-3}\cdot x^{-3}+c\Rightarrow$$
$$F(x)=\tfrac{1}{x}-1\cdot\tfrac{1}{x^2}-1\cdot\tfrac{1}{x^3}+c=\boxed{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}+c}$$

d. $f(x)=\ln(x\sqrt{x})=\ln(x^{1\frac{1}{2}})=\tfrac{3}{2}\ln(x)\Rightarrow$ $\quad F(x)=\tfrac{3}{2}(x\ln x-x+c)=\boxed{\tfrac{3}{2}x\ln(x)-\tfrac{3}{2}x+c_1}$

e.

$$f(x)={}^2\log\left(\frac{1}{x}\right)={}^2\log(x^{-1})=-{}^2\log(x)=-\frac{1}{\ln(2)}\cdot\ln(x)\Rightarrow$$
$$F(x)=-\frac{1}{\ln(2)}\cdot(x\ln(x)-x+c)=\boxed{-\frac{1}{\ln(2)}\cdot(x\ln(x)-x)+c_1}$$

f.

$$f(x)=5.\log(2x)=5\log(2)+5\log(x)=5\log(2)+5.\frac{\ln(x)}{\ln(2)}=5\log(2)+\frac{5}{\ln(2)}.\ln(x)\Rightarrow$$
$$F(x)=5\log(2).x+\frac{5}{\ln(2)}.(x\ln(x)-x)+c$$

41. Gegeven $f(x)=2x-3$

a. Een primitieve is : $F(x)=x^2-3x+c$

b. Primitieve door $(1,2)\Rightarrow 1^2-3+c=2\Leftrightarrow c=4\Rightarrow$ De primitieve is : $F(x)=x^2-3x+4$

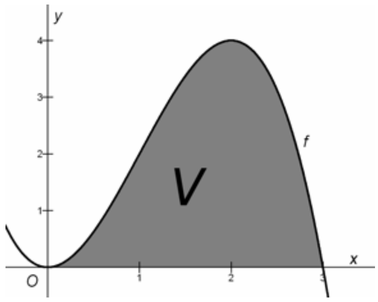
c. Nu $y = x^2 - 3x + c$ raakt de x-as $\Rightarrow$ $x^2 - 3x + c = 0$ en $y' = 2x - 3 = 0$ $\Rightarrow$
$x = 1{,}5 \Rightarrow 1{,}5^2 - 3.1{,}5 + c = 0 \Leftrightarrow c = 4{,}5 - 2{,}25 \Leftrightarrow c = 2{,}25$

42. Gegeven : $f(x) = (x^2 - 1)^2 \Rightarrow f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 \Rightarrow$
Een primitieve is: $\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x + c$ Door punt (1,7) $\Rightarrow$
$\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 + c = 7 \Leftrightarrow c = \frac{97}{15} \Leftrightarrow c = 6\frac{7}{15} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x + 6\frac{7}{15}$

43.
a. $f(x) = x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$
b.
$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 \Rightarrow O(x) = F(x) = \frac{1}{3}x^3 + c \\ \text{zie figuur 10.24: } O(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \tfrac{1}{3}0^3 + c = 0 \Rightarrow \boxed{c = 0}$$

c.
$$\left.\begin{array}{l} O(x) = \frac{1}{3}x^3 \Rightarrow O(p) = \frac{1}{3}p^3 \\ O(p) = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \tfrac{1}{3}p^3 = 10 \Leftrightarrow p^3 = 30 \Leftrightarrow p = \sqrt[3]{30}$$

44. Gegeven: $f(x) = 3x^2 - x^3$



a. Eerst de snijpunten met de x-as $\Rightarrow$
$3x^2 - x^3 = 0 \Leftrightarrow x^2(3 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$
Opp. = $\int_0^3 (3x^2 - x^3)dx = [x^3 - \frac{1}{4}x^4]_0^3 = \left(27 - \frac{1}{4}.81\right) - 0 = 6\frac{3}{4}$

b. Nu moet gelden:
$$\int_0^p (3x^2 - x^3)dx = [x^3 - \frac{1}{4}x^4]_0^p = 3\frac{3}{8} \Leftrightarrow p^3 - \frac{1}{4}p^4 = 3\frac{3}{8}$$
Voer in : $y_1 = x^3 - 0{,}25x^4$ en $y_2 = 3\frac{3}{8}$ Met intersect vinden $x = p \approx 1{,}84 \vee$
$x = p \approx 3{,}74$(vervalt , want buiten het gebied)

c. $I(L) = \int_0^3 \pi(3x^2 - x^3)^2 dx = \int_0^3 \pi\left(9x^4 - 6x^5 + x^6\right)dx = \pi\left[\frac{9}{5}x^5 - x^6 + \frac{1}{7}x^7\right]_0^3 = \frac{729}{35}\pi$

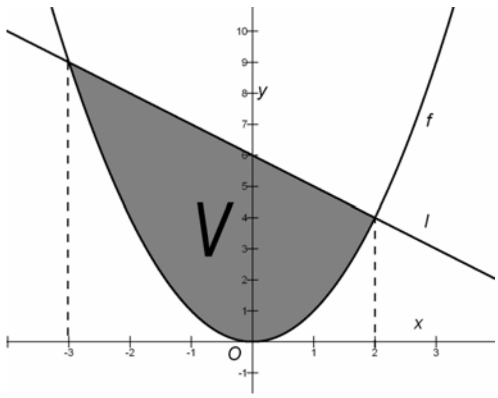
d. Nu moet gelden :
$$I(L) = \int_0^q \pi(3x^2 - x^3)^2 dx = \int_0^q \pi\left(9x^4 - 6x^5 + x^6\right)dx = \pi\left[\frac{9}{5}x^5 - x^6 + \frac{1}{7}x^7\right]_0^q = \frac{729}{70}\pi \Leftrightarrow$$

$\pi\left(\frac{9}{5}q^5 - q^6 + \frac{1}{7}q^7\right) = \frac{729}{70}\pi \Rightarrow$ Voer in : $y_1 = \frac{9}{5}x^5 - x^6 + \frac{1}{7}x^7$ en $y_2 = \frac{729}{70}$
Met de optie intersect vinden we $x = q \approx 1{,}91$

45. Gegeven $f(x) = x^2$ en de lijn $y = 6 - x$

a. Eerst de snijpunten berekenen. $\Rightarrow$

$6x - x = x^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = -3;\ \ x = 2$



$$O(V) = \int_{-3}^{2}\left(6 - x - x^2\right)\cdot \mathrm{d}x \ = \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6x\right]_{-3}^{2} =$$

$$\left(-\frac{8}{3} - 2 + 12\right) - \left(9 - 4\frac{1}{2} - 18\right) = 7\frac{1}{3} - \left(-13\frac{1}{2}\right) = \ 20\frac{5}{6}$$

b.

$$O(\text{links}) = \int_{-3}^{p}\left(6 - x - x^2\right)\cdot \mathrm{d}x =; \ \Rightarrow$$

$$\left[6x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_{-3}^{p} = 10\frac{5}{12} \Leftrightarrow$$

$$\left(6p - \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{3}p^3\right) - \left(-18 - 4\frac{1}{2} + 9\right) = 10\frac{5}{12} \Leftrightarrow$$

$$\left(6p - \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{3}p^3\right) - (-13\frac{1}{2}) = 10\frac{5}{12} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{3}p^3 - \frac{1}{2}p^2 + 6p + 13\frac{1}{2} = 10\frac{5}{12}$$

Voer in: $y_1 = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6x + 13\frac{1}{2}$; $\qquad y_2 = 10\frac{5}{12}$

Calc intersect geeft: $x = p \approx -0,50$

Ook kan uiteraard:

$y_1 = \text{fnInt}(6 - x - x^2,\ \ x,\ \ -3,\ x)$; $\qquad y_2 = 10 + 5/12;$ window : $[-3,\ 0]\times[0,\ 15]$

calc intersect.

c. $$\text{I(L)} = \pi\int_{-3}^{2}(6-x)^2\,dx - \pi\int_{-3}^{2}x^4dx = \pi\int_{-3}^{2}\left(36 - 12x + x^2\right)dx - \pi\int_{-3}^{2}x^4dx =$$

$$\pi\left[36x - 6x^2 + \tfrac{1}{3}x^3\right]_{-3}^{2} - \pi\left[\tfrac{1}{5}x^5\right]_{-3}^{2} = \pi\left(50\frac{2}{3} - (-171)\right) - \pi\left(\frac{32}{5} - (-48,6)\right) = 166\frac{2}{3}\pi$$

46.

a. Bedenk dat f te schrijven is als $x + 1 + \frac{1}{x}$. Eerst de snijpunten $\Rightarrow$

$$\frac{x^2 + x + 1}{x} = \frac{-3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 + 2x + 2 = -3x \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 + 5x + 2 = 0$$

dit geeft: $x = -\frac{1}{2} \vee x = -2.$

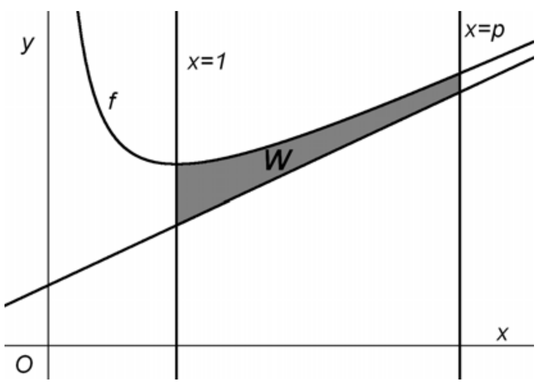
$$O(V) = \int_{-2}^{-\frac{1}{2}}(f - g)\cdot \mathrm{d}x = \int_{-2}^{-\frac{1}{2}}\left(x + 1 + \tfrac{1}{x} + 1\tfrac{1}{2}\right)\cdot \mathrm{d}x = \int_{-2}^{-\frac{1}{2}}\left(x + \tfrac{1}{x} + 2\tfrac{1}{2}\right)\cdot \mathrm{d}x$$

$$\left[\tfrac{1}{2}x^2 + \ln|x| + 2\tfrac{1}{2}x\right]_{-2}^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{8} + \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{5}{4}\right) - \left(2 + \ln(2) - 5\right) =$$

$$1\frac{7}{8} + \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln(2) = 1\frac{7}{8} - 2\ln(2)$$

b.

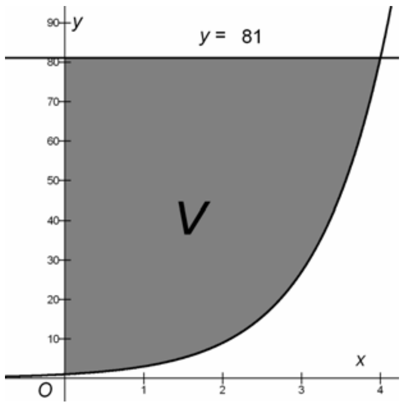
p>1: zie figuur



$$O(W)=\int_1^p\left((x+1+\frac{1}{x})-(x+1)\right)\cdot \mathrm{d}x=\int_1^p\frac{1}{x}\cdot \mathrm{d}x \quad =$$
$$\left[\ln(x)\right]_1^p=2\Leftrightarrow \ln(p)-0=2\Rightarrow p=e^2$$

47.

Gegeven $f(x) = 3^x$



a. Snijpunten $\Rightarrow \quad f(x)=81\Leftrightarrow 3^x=81\Rightarrow x=4$

$$O(V)=\int_0^4\left(81-3^x\right)\cdot \mathrm{d}x=\left[81\cdot x-\frac{3^x}{\ln 3}\right]_0^4=$$
$$\left(324-\frac{81}{\ln 3}\right)-\left(\frac{-1}{\ln 3}\right)=324-\frac{80}{\ln 3}$$

b.

$$O(V_1)=\int_0^a\left(81-3^x\right)\cdot \mathrm{d}x=\left[81\cdot x-\frac{3^x}{\ln 3}\right]_0^a=$$
$$\left(81\cdot a-\frac{3^a}{\ln 3}\right)-\left(\frac{-1}{\ln 3}\right)=81\cdot a-\frac{3^a}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 3}$$

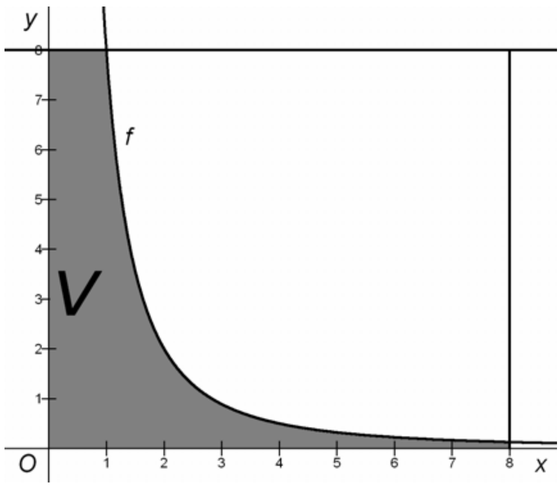
Nu geldt: $O(V_1) = 162 - \dfrac{40}{\ln 3}$

Voer in:

$$y_1=81\cdot x-\frac{3^x}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 3}\ ;\ y_2=162-\frac{40}{\ln 3}$$

Calc intersect geeft: $x=a\approx 1{,}60$

48. Gegeven $f(x) = \dfrac{8}{x^2}$



a. Zie figuur.

$$f(x)=\frac{8}{x^2}\Rightarrow f(8)=\frac{1}{8};\ \frac{8}{x^2}=8\ \Leftrightarrow x^2=1\Rightarrow x=1$$

Coördinaten snijpunten met lijnen: (1, 8) (8, $\frac{1}{8}$)

We gaan eerst de totale oppervlakte berekenen. $\Rightarrow$

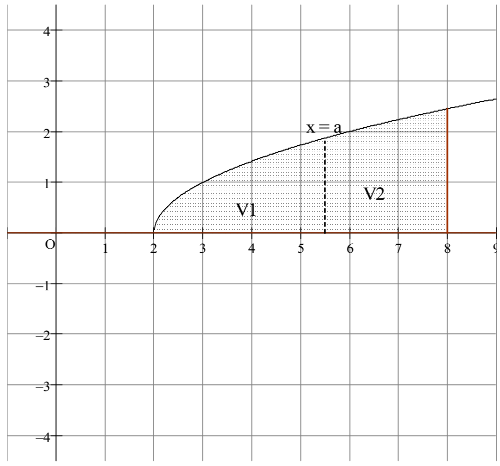
$$O(V)=8+\int_1^8 8x^{-2}\cdot \mathrm{d}x=8+\left[-\tfrac{8}{x}\right]_1^8=8+(-1)+8=15$$

De verhouding van de delen is 2 : 1 $\Rightarrow$

$O(V_1) = 10$ en $O(V_2) = 5$

$$\int_a^8\frac{8}{x^2}dx=5\Leftrightarrow\left[-\frac{8}{x}\right]_a^8=5\Leftrightarrow -1+\frac{8}{a}=5\Leftrightarrow\frac{8}{a}=6\Leftrightarrow a=1\frac{1}{3}$$

49. Gegeven $f(x) = \sqrt{x-2}$



$$I(L) = \int_2^8 \pi(x-2)\cdot \mathrm{d}x = \int_2^8 (\pi x - 2\pi)\cdot \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\pi x^2 - 2\pi x\right]_2^8 =$$
$$(32\pi - 16\pi) - (2\pi - 4\pi) = 18\pi$$

$$I(V_1) = \int_2^a \pi(x-2)\cdot \mathrm{d}x = \left[\pi(\tfrac{1}{2}x^2 - 2x)\right]_2^a =$$
$$\pi(\tfrac{1}{2}a^2 - 2a) - (-2\pi) = \pi(\tfrac{1}{2}a^2 - 2a + 2)$$

Nu geldt dus :

$$\pi(\tfrac{1}{2}a^2 - 2a + 2) = 9\pi \Leftrightarrow \tfrac{1}{2}a^2 - 2a + 2 = 9 \Leftrightarrow \Rightarrow$$
$$\tfrac{1}{2}a^2 - 2a - 7 = 0$$

$$D = 4 - 4.\frac{1}{2}.(-7) = 18 \Rightarrow a = \frac{2+\sqrt{18}}{1} = 2 + 3\sqrt{2} \vee a = \frac{2-\sqrt{18}}{1} = 2 - 3\sqrt{2} \text{ (vervalt)}$$

$\Rightarrow a = 2 + 3\sqrt{2}$

50. Gegeven $f(x) = (3x + 1)^5$

a. $F(x) = a(3x + 1)^6 + c \Rightarrow F'(x) = a.6(3x + 1)^5 . 3 = 18a(3x + 1)^5$

b. Nu geldt: $18a(3x + 1)^5 = (3x + 1)^5 \Rightarrow 18a = 1 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{18}$

51. We moeten $G(x) = \dfrac{1}{a}.F(ax+b)+c$ gaan differentiëren $\Rightarrow$

$$G'(x) = \frac{1}{a}.F'(ab+b).a = F'(ax+b) = f(ax+b)$$

52.

a $f(x) = (2x-1)^6$ $\Rightarrow$ De primitieve heeft de vorm van $(2x - 1)^7$.

Terugdifferentiëren geeft $7.(2x - 1)^6.2$ $\Rightarrow$ De primitieve is: $\dfrac{1}{14}(2x-1)^7 + c$

b. $g(x) = \dfrac{1}{(3x+4)^3} = (3x+4)^{-3}$ $\Rightarrow$ De primitieve heeft de vorm van $(3x + 4)^{-2}$

Terugdifferentiëren geeft $-2.(3x + 4)^{-3}.3$ $\Rightarrow$ De primitieve is:

$$-\frac{1}{6}(3x+4)^{-2} + c = -\frac{1}{6(3x+4)^2} + c$$

c. $h(x) = 4\sqrt{3-2x} = 4.(3-2x)^{\frac{1}{2}}$ $\Rightarrow$ De primitieve heeft de vorm van $(3-2x)^{\frac{3}{2}}$

Terugdifferentiëren geeft $\dfrac{3}{2}(3-2x)^{\frac{1}{2}}.-2 = -3(3-2x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$

De primitieve is: $-\dfrac{4}{3}(3-2x)^{1\frac{1}{2}} + c = -\dfrac{4}{3}(3-2x)\sqrt{3-2x} + c$

d. $j(x)=\dfrac{2}{\sqrt{1-x}}=2.(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ $\Rightarrow$ De primitieve heeft de vorm van $(1-x)^{\frac{1}{2}}$

Terugdifferentiëren geeft $\dfrac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}.(-1)\Rightarrow$

De primitieve is: $-4(1-x)^{\frac{1}{2}}+c=-4\sqrt{1-x}+c$

53.

a. $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ $\Rightarrow$ $F(x) = \ln(x-1) + c$

b. $f(x) = \dfrac{3}{2x-5}$ $\Rightarrow$ De primitieve heeft de vorm van $\ln(2x-5)$.

Terugdifferentiëren geeft $\dfrac{1}{2x-5}.2$ $\Rightarrow$ $F(x)=\dfrac{3}{2}\ln(2x-5)+c$

c. $f(x)=e^{4x-1}$ De primitieve heeft de vorm van e^{4x-1}

Terugdifferentiëren geeft e^{4x-1} . 4 $\Rightarrow$ $F(x)=\dfrac{1}{4}e^{4x-1}+c$

d. $f(x)=\ln(4x-1)$ De primitieve heeft de vorm van $(4x-1).\ln(4x-1)$

Terugdifferentiëren geeft $4.\ln(4x-1) + (4x-1).\dfrac{1}{4x-1}.4 = 4.\ln(4x-1) + 4$ $\Rightarrow$

$F(x) = \dfrac{1}{4}(4x-1).\ln(4x-1) - x + c$

e. $f(x)=(2x+1)\sqrt{2x+1}=(2x+1)^{\frac{3}{2}}$ De primitieve heeft de vorm van $(2x+1)^{\frac{5}{2}}$

Terugdifferentiëren geeft $\dfrac{5}{2}(2x-1)^{\frac{3}{2}}.2=5(2x-1)^{\frac{3}{2}}$ $\Rightarrow$

$F(x)=\dfrac{1}{5}(2x-1)^{\frac{5}{2}}+c=\dfrac{1}{5}(2x-1)^{2}\sqrt{2x-1}+c$

f. $f(x)=2^{3x}$ De primitieve heeft de vorm van 2^{3x}

Terugdifferentiëren geeft $2^{3x}.\ln(2).3$ $\Rightarrow$ $F(x)=\dfrac{2^{3x}}{3.\ln(2)}+c$

g. $f(x)=3^{2-5x}$ De primitieve heeft de vorm van 3^{2-5x}

Terugdifferentiëren geeft $3^{2-5x}.\ln(3).(-5)$ $\Rightarrow$ $F(x)=-\dfrac{3^{2-5x}}{5.\ln(3)}+c$

h. $f(x)={}^{2}\log(5x+3)=\dfrac{\ln(5x+3)}{\ln(3)}=\dfrac{1}{\ln(3)}.\ln(5x+3)$ De primitieve heeft de vorm van $(5x+3).\ln(5x+3)$

Terugdifferentiëren geeft 5.ln(5x + 3) +(5x + 3).$\dfrac{1}{5x+3}$.5 = 5.ln(5x + 3) +5 $\Rightarrow$

$$F(x)=\frac{1}{\ln(3)}.\left(\frac{1}{5}(5x+3).\ln(5x+3)-x\right)+c$$

54. Gegeven: $f(x)=\dfrac{5}{2x+1}$ en $g(x)=\dfrac{5}{10-4x}$

a. Eerst het snijpunt. $\Rightarrow$ $\dfrac{5}{10-4x}=\dfrac{5}{2x+1}\Rightarrow 10-4x=2x+1\Leftrightarrow -6x=-9\Leftrightarrow x=1,5$

$\Rightarrow$ Opp. = $\displaystyle\int_0^{1,5}\frac{5}{10-4x}\,dx+\int_{1,5}^{2}\frac{5}{2x+1}\,dx=$

Apart: Een primitieve van $g(x)$ heeft de vorm : ln(10 – 4x) Nu deze vorm differentiëren $\Rightarrow$

$\dfrac{1}{10-4x}.(-4)=\dfrac{-4}{10-4x}$ $\Rightarrow$ Een primitieve is $-\dfrac{5}{4}.\ln(10-4x)$

Op dezelfde manier is een primitieve van $f(x)$: $\dfrac{5}{2}\ln(5x+2)$ $\Rightarrow$

Opp. = $\left[-\dfrac{5}{4}\ln(10-4x)\right]_0^{1,5}+\left[\dfrac{5}{2}\ln(2x+1)\right]_{1,5}^{2}=-\dfrac{5}{4}\ln(4)+\dfrac{5}{4}\ln(10)+\dfrac{5}{2}\ln(5)-\dfrac{5}{2}\ln(4)=$

$\dfrac{5}{4}\big(\ln(10-\ln(4)+2\ln(5)-2\ln(4)\big)=\dfrac{5}{4}\big(\ln(250-3\ln(4)\big)=\dfrac{5}{4}\ln\left(\dfrac{250}{64}\right)$

b. Nu het omwentelingslichaam van V. $\Rightarrow$

I(V) = $\pi\displaystyle\int_0^{1,5}\frac{25}{(10-4x)^2}\,dx+\pi\int_{1,5}^{2}\frac{25}{(2x+1)^2}dx$

Apart: Een primitieven van $\dfrac{25}{(10-4x)^2}=25.(10-4x)^{-2}$ komt van de vorm (10 – 4x)$^{-1}$

Nu deze vorm differentiëren $\Rightarrow$ -1(10 – 4x)$^{-2}$.-4 = $\dfrac{4}{(10-4x)^2}$ $\Rightarrow$

Een primitieve is $\dfrac{25}{4}.(10-4x)^{-1}=\dfrac{25}{4(10-4x)}$

Op ongeveer dezelfde maniet is een primitieve van $f(x)$: $-\dfrac{25}{2(2x+1)}$ $\Rightarrow$

$$I(V)=\pi\left[\frac{25}{4(10-4x)}\right]_0^{1,5}+\pi\left[-\frac{25}{2(2x+1)}\right]_{1,5}^{2}=\pi\left(\frac{25}{16}-\frac{25}{40}+\frac{-25}{10}+\frac{25}{8}\right)=\frac{25}{16}\pi$$

55.

a. Als je dat zou doen dan heb bij het terugdifferentiëren te maken met de productregel en dan kom je totaal niet uit.

b. $G(X)=a.\left(4x^2-1\right)^{1\frac{1}{2}} \Rightarrow G'(x)=a.1\frac{1}{2}\left(4x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}.8x=12.ax.\sqrt{4x^2-1}$ Dit is een andere vorm. Zie ook de opmerking bij vraag a.

c. Als we een primitieve van $h(x)=x\sqrt{4x^2-1}$ moeten vinden dan komt de vorm van vraag bij wel uit.

De constante a is dan $\frac{1}{12}$ $\Rightarrow$ Een primitieve van $h(x)$ is dan : $F(x)$ =
$\frac{1}{12}\left(4x^2-1\right)^{1,5}=\frac{1}{12}\left(4x^2-1\right)\sqrt{4x^2-1}$

56. $y = 0{,}5x$

a. $I=\int_0^6 \pi(\frac{1}{2}x)^2\cdot \mathrm{d}x=\int_0^6 \frac{1}{4}\pi x^2 dx=\left[\frac{1}{12}\pi x^3\right]_0^6=18\pi-0=18\pi$

b. L is een kegel met straal grondcirkel is 3 en hoogte 6.

57. De inhoud van de afgeknotte kegel is :
$\frac{1}{3}.\pi.4^2.6-\frac{1}{3}.\pi.\left(\frac{2}{3}p\right)^2.p=24\pi \Leftrightarrow 32-\frac{4}{27}p^3=24 \Leftrightarrow 8=\frac{4}{27}p^3 \Leftrightarrow p^3=54 \Leftrightarrow p=\sqrt[3]{54}$

58. y = 1,5x
$I(K_p)=\frac{1}{3}.\pi.12^2.8-\frac{1}{3}.\pi.(1{,}5p)^2.p=378\pi \Leftrightarrow 384\pi-0{,}75p^3.\pi=378\pi \Leftrightarrow$
$6=0{,}75p^3 \Leftrightarrow p^3=8 \Leftrightarrow p=2$

59.
Een bol kunnen we zien als het omwentelingslichaam van een cirkel met straal r.
Bol met straal r .

Definieer dus een halve cirkel met middelpunt (0,0) en straal r en ga deze omwentelen om de x-as.

$x^2+y^2=r^2 \Rightarrow \quad y^2=r^2-x^2$
$I(\text{bol}) = \quad 2\int_0^r \pi\cdot y^2\cdot \mathrm{dx} = \int_0^r 2\pi\cdot\left(r^2-x^2\right)\cdot dx=\left[2\pi\left(r^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\right]_0^r=2\pi\left(r^3-\frac{1}{3}r^3\right)-0=\frac{4}{3}\pi r^3$

60. Gegeven de cirkel $x^2+y^2=r^2$

$\mathrm{I}(V)=\int_{\frac{1}{3}r}^{r}\pi\left(r^2-x^2\right)dx=\pi\left[r^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{1}{3}r}^{r}=\pi\left(\frac{2}{3}r^3\right)-\left(\pi\frac{1}{3}r^3-\frac{1}{81}r^3\right)=\frac{28}{81}\pi r^3$

61. Gegeven de cirkel c: $x^2 + y^2 = 36$

I(bol) = $\frac{4}{3}\pi.6^3 = 288\pi$

Nu moet gelden :

$\int_{-3}^{p} \pi.(36 - x^2)dx = 144\pi \Leftrightarrow \pi\left[36x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-3}^{p} = 144\pi \Leftrightarrow \left(36p - \frac{1}{3}p^3\right) - (-108 + 9) = 144 \Leftrightarrow$

$-\frac{1}{3}p^3 + 36p - 45 = 0 \;\Rightarrow\;$ Voer in : $y_1 = -\frac{1}{3}x^3 + 36x - 45 = 0 \;\Rightarrow$

Met de optie zero vinden we $x \approx 1{,}27 \;\Rightarrow\; p \approx 1{,}27$

62. Gegeven $x^2 + y^2 = 25$ en k: $y = -0{,}75x + 6{,}25$

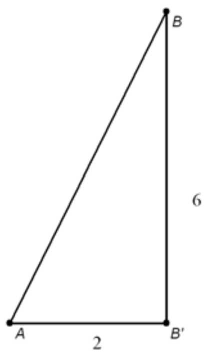
Eerst het snijpunt van k met de x-as $\Rightarrow$ $-0{,}75x + 6{,}25 = 0 \Leftrightarrow 0{,}75x = 6{,}25 \Leftrightarrow x = 8\frac{1}{3}$ Kijk goed in de figuur $\Rightarrow$

I(V) = $\frac{1}{3}\pi.4^2.\left(8\frac{1}{3} - 3\right) - \pi\int_{3}^{5}\left(25 - x^2\right)dx = 28\frac{4}{9}\pi - \pi\left[25x - \frac{1}{3}x^3\right]_{3}^{5} =$

$28\frac{4}{9}\pi - \pi\left(\left(125 - \frac{125}{3}\right) - (75 - 9)\right) = 28\frac{4}{9}\pi - 17\frac{1}{3}\pi = 11\frac{1}{9}\pi$

63.

a. Zie figuur $AB = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{40} \approx 6{,}32$



b.

$\left.\begin{array}{l} A(2,2)\ ;\ \ B(4,8) \\ x_C = 3 \Rightarrow y_C = \frac{1}{2}\cdot 3^2 = 4\tfrac{1}{2} \Rightarrow C(3,\ 4\frac{1}{2}) \end{array}\right\} \Rightarrow$

Lengte = $AC + CB = \sqrt{1^2 + 2{,}5^2} + \sqrt{1^2 + 3{,}5^2} \approx 2{,}69258 + 3{,}64005 \approx 6{,}33$

Het is dus een betere benadering.

64. Gegeven $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow f'(x) = x$

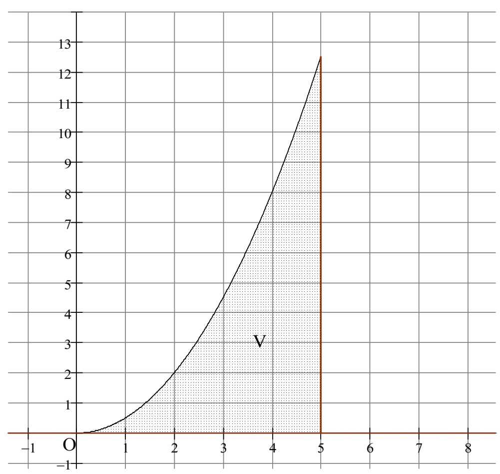
Lengte boog = $\int_{0}^{5}\sqrt{1 + x^2}\,dx$

Voer in $y_1 = \sqrt{(1 + x^2)}$

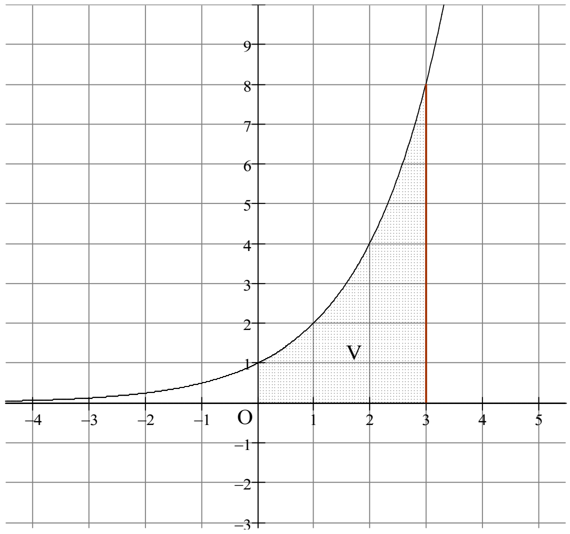
$\Rightarrow$ Lengte boog = fnInt(y_1 , x ,0,5) $\approx$ 13,9038

$\Rightarrow$ De gevraagde omtrek is :

13,9038 + 12,5 + 5 $\approx$ 31,40



65. Gegeven $f(x) = 2^x$



De opstaande stukken hebben de lengte 1 en 8 (de 2 functiewaarden)

$f'(x) = 2^x.\ln(2) \Rightarrow$

Voer in : $y_1 = \left(2^x.\ln(2)\right)^2$

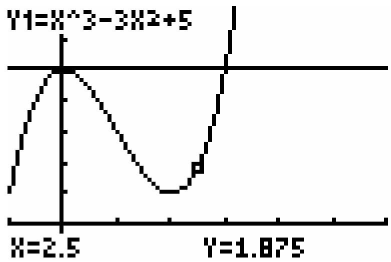
en $y_2 = \sqrt{1+y_1} \Rightarrow$

Booglengte = $\int_0^3 \sqrt{1+\left(2^x.\ln(2)\right)^2}\,dx$ =

fnInt (y_2 , x , 0 , 3) ≈ 7,792 ⇒
De gevraagde omtrek is :
1 + 3 + 8 + 7,792 ≈ 19,792

66. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ en $y = 5$

Eerst de snijpunten. ⇒ $x^3 - 3x^2 + 5 = 5 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$
Zie ook de figuur.
De horizontale lengte is 3.



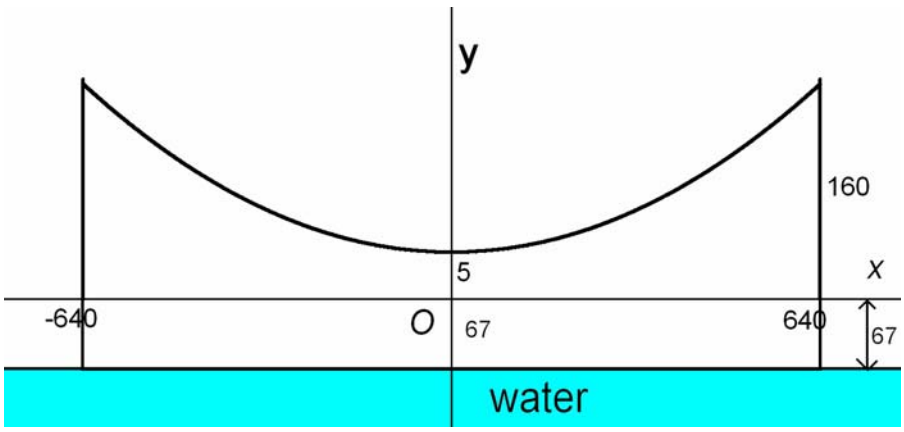
$f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow$

Voer in $y_1 = 3x^2 - 6x$ en $y_2 = \sqrt{1+(y_1)^2} \Rightarrow$

Booglengte is : $\int_0^3 \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx =$

fnInt (y_2 , x , 0 , 3) ≈ 8,81 ⇒
De gevraagde omtrek is ongeveer 11,81

67.



We definiëren een assenstelsel met *O* op de brug onder het laagste punt van de kabel, de *x*-as op de brug: zie figuur hierboven.
Top van de parabool op de *y*-as, dus parabool van de vorm

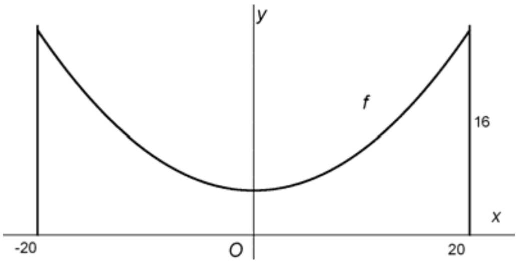
$y = ax^2 + b$ door $(0, 5)$ geeft $b = 5 \Rightarrow y = ax^2 + 5$

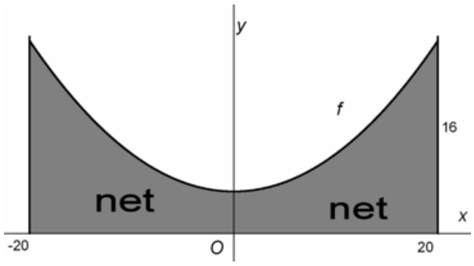
door $(640, 160)$ geeft $160 = a \cdot 640^2 + 5 \Rightarrow a = \dfrac{155}{640^2} \approx 0{,}0003784 \Rightarrow$

$y = 0{,}0003784 \cdot x^2 + 5 = f(x) \Rightarrow f'(x) = 0{,}0007568 \cdot x$

$\text{bg } AB = 2\int_0^{640} \sqrt{1 + (0{,}0007568 \cdot x)^2} \cdot \mathrm{d}x \approx 1328$ meter

68.





a. $f(20) \approx$ 15,0 meter

b.

$f(x) = 4\left(e^{0,062x} + e^{-0,062x}\right) \Rightarrow f'(x) = 0{,}248\left(e^{0,062x} - e^{-0,062x}\right)$

$\text{lengte kabel} = \int_{20}^{20} \sqrt{1 + \left(0{,}248\left(e^{0,062x} - e^{-0,062x}\right)\right)^2} \cdot \mathrm{d}x = \text{fnInt}\left(\sqrt{1 + \left(0{,}248\left(e^{0,062x} - e^{-0,062x}\right)\right)^2},\ x,\ -20,\ 20\right) \approx \boxed{43{,}2 \text{ m}}$

c. Zie rechtsboven de figuur. $y_1 = 4(e^{0,062x} + e^{-0,062x})$

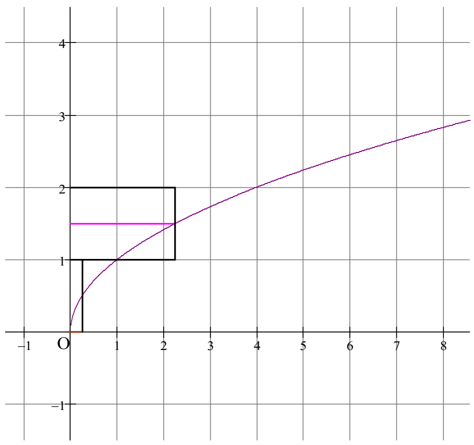
Opp net = fnInt (y_1, x, -20, 20) $\approx 409 \text{ m}^2$

69. **Gegeven y = √ x**

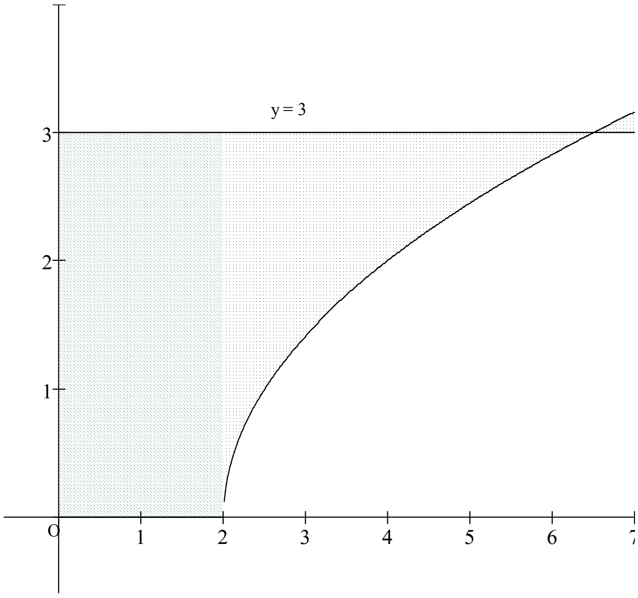
De twee cilinders met hoogte 1 zijn te zien in de figuur.

De straal van de onderste cilinder bevindt zich op een hoogte 0,5. Nu geldt dus $\sqrt{x} = 0{,}5 \Rightarrow$
$x = 0{,}25 \Rightarrow$ De straal van de onderste cilinder is 0,25.

De straal van de bovenste cilinder is op een hoogte van 1,5. Nu geldt : $\sqrt{x} = 1{,}5 \Rightarrow x = 2{,}25 \Rightarrow$
de straal van de bovenste cilinder is 2,25.



70.



a. $y = \sqrt{2x-4}$

$y^2 = 2x - 4$

$x = \frac{1}{2}y^2 + 2$

$x^2 = \frac{1}{4}y^4 + 2y^2 + 4$

$I = \int_0^3 \pi x^2 dy =$

$\int_0^3 \pi\left(\frac{1}{4}y^4 + 2y^2 + 4\right)dy =$

$\left[\pi\left(\frac{1}{20}y^5 + \frac{2}{3}y^3 + 4y\right)\right]_0^3$

$= \dfrac{843}{20}\pi - 0 = \dfrac{843}{20}\pi = 42{,}15\pi$

b. Het snijpunt met $y = 3 \Rightarrow \sqrt{2x-4} = 3 \Leftrightarrow 2x - 4 = 9 \Leftrightarrow x = \dfrac{13}{2}$

$$I = I\left(\text{cilinder}\right) - \int_2^{\frac{13}{2}} \pi y^2 dx = \pi \cdot 3^2 \cdot \frac{13}{2} - \int_2^{\frac{13}{2}} \pi\left(2x-4\right)dx$$

$$= \frac{117}{2}\pi - \left[\pi\left(x^2 - 4x\right)\right]_2^{\frac{13}{2}} = \frac{117}{2}\pi - \left(\frac{65}{4}\pi - -4\pi\right) = \frac{153}{4}\pi = 38{,}25\pi$$

71. Gegeven $y = x^2$ **en punt** $P(p\ ,\ q)$

a. $W_4 \Rightarrow q = 4$ Bij $y = 4 = q$ hoort $p = 2$ en dus ook $q = 4$.

$y = x^2 \Rightarrow x^2 = y \Rightarrow$

$I = \int_0^4 \pi x^2 dy = \int_0^4 \pi y dy \left[\frac{1}{2}\pi y^2\right]_0^4 = 8\pi - 0 = 8\pi$

b. $I\left(V_p\right) = \int_0^p \pi y^2 dx = \int_0^p \pi x^4 dx = \left[\dfrac{1}{5}\pi y^5\right]_0^p = \dfrac{1}{5}\pi p^5$

Nu gaan we W_q wentelen om de y-as .$\Rightarrow$

$I\left(W_q\right) = \int_0^q \pi x^2 dy = \int_0^q \pi y dy = \left[\dfrac{1}{2}\pi y^2\right]_0^q = \dfrac{1}{2}\pi q^2$

Deze twee zijn gelijk, dus $\dfrac{1}{5}\pi p^5 = \dfrac{1}{2}\pi q^2$

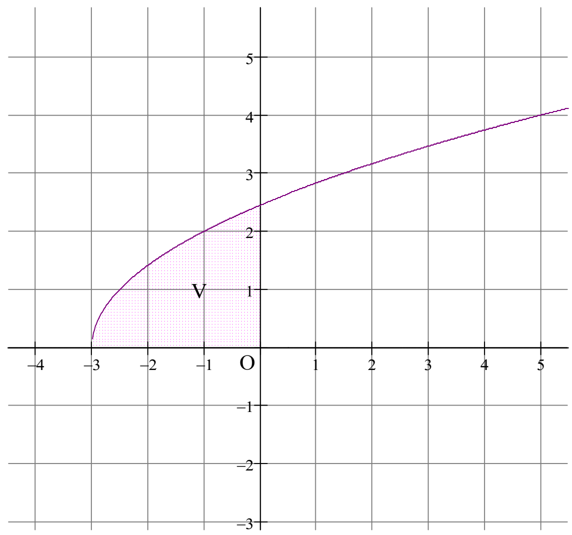
Omdat $p^2 = q$ is dus $q^2 = p^4$, dit invullen geeft

$\dfrac{1}{5}\pi p^5 = \dfrac{1}{2}\pi p^4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{5}p^5 - \dfrac{1}{2}p^4 = 0 \Leftrightarrow 2p^5 - 5p^4 = 0 \Leftrightarrow$

$p^4\left(2p - 5\right) = 0 \Leftrightarrow p = 0 \vee p = 2{,}5$

$p = 0$ vervalt dus $p = 2\frac{1}{2}$ en $q = p^2 = \dfrac{25}{4} = 6\dfrac{1}{4}$

72. Gegeven de functie: $f(x)=\sqrt{2x+6}$



a.

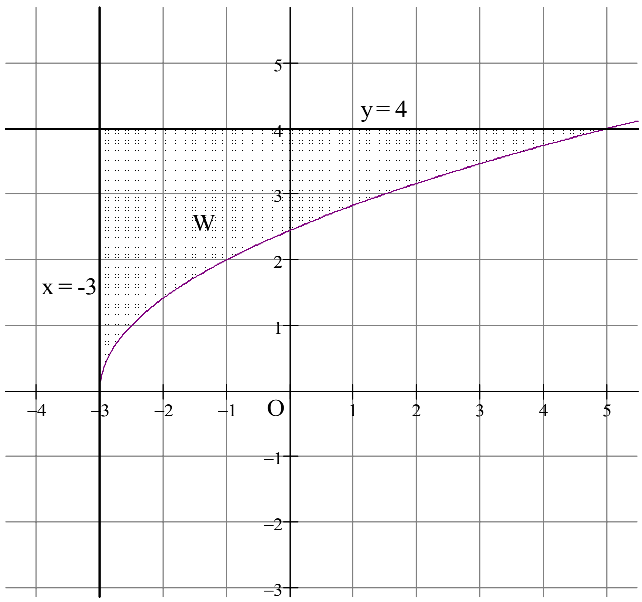
$$I(L)=\pi\int_{-3}^{0}(2x+6)dx=\pi\left[x^2+6x\right]_{-3}^{0}=$$

$$\pi(0-(9-18))=9\pi$$

b. Nu V om de y-as . Eerst x^2 berekenen.$\Rightarrow$
$y=\sqrt{(2x+6)}\Rightarrow y^2=2x+6\Leftrightarrow$
$2x=y^2-6\Leftrightarrow x=0{,}5y^2-3\Rightarrow$
$x^2=0{,}25y^4-3y^2+9\Rightarrow$
Verder is het snijpunt met de y-as bij $y=\sqrt{6}\Rightarrow$

$$I(M)=\pi\int_0^{\sqrt{6}}x^2dy=\pi\int_0^{\sqrt{6}}\left(0{,}25y^4-3y^2+9\right)=$$

$$=\pi\left[0{,}05y^5-y^3+9y\right]_0^{\sqrt{6}}=\pi\left(\left(1{,}8\sqrt{6}-6\sqrt{6}+9\sqrt{6}\right)-0\right)=4{,}8.\pi.\sqrt{6}$$



c. f wentelen om de lijn $x=-3\Rightarrow$ Eerst transleren 3 naar rechts en vervolgens het nieuwe gebied wentelen om de y-as. $\Rightarrow$

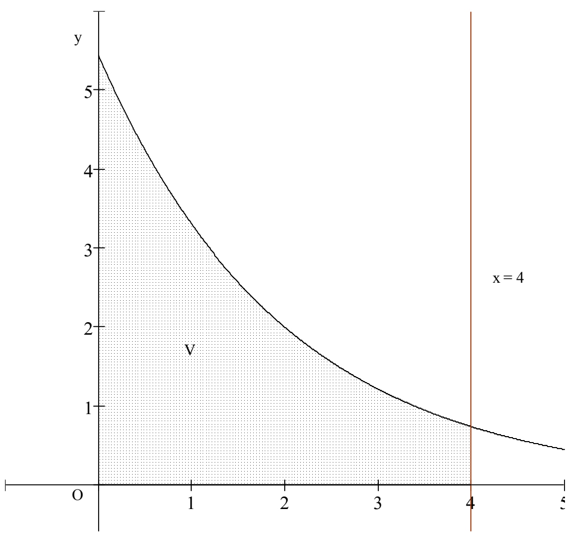
$$y=\sqrt{2x+6}\xrightarrow{T(3,0)}y=\sqrt{2(x-3)+6}=\sqrt{2x}$$

Nu $y=\sqrt{(2x)}\Rightarrow 2x=y^2\Rightarrow x=0{,}5y^2\Rightarrow$
$x^2=0{,}25y^4\Rightarrow$

$$I=\pi\int_0^4 x^2dy=\pi\int_0^4 0{,}25y^4dy=\pi\left[\frac{1}{20}y^5\right]_0^4=$$

$$\pi\left(\frac{1024}{20}-0\right)=51{,}2\pi$$

73. **Gegeven** $f(x)=2.e^{-0{,}5x+1}$



a.

$$O(V)=\int_0^4 f(x)dx=\int_0^4 2e^{1-0{,}5x}dx=$$

$$=\left[-4e^{1-0{,}5x}\right]_0^4=-4e^{-1}-\left(-4e^{1}\right)=-\frac{4}{e}+4e$$

b. Lengte gebogen stuk is $\int_0^4 \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$

$f'(x) = 2e^{-0,5x+1} \cdot (-0,5) = -e^{1-0,5x}$

De booglengte is : $\int_0^4 \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx = \int_0^4 \sqrt{1+\left(-e^{1-0,5x}\right)^2}\,dx =$

Voer in : $y_1 = -e^{1-0,5x}$ en $y_2 = \sqrt{1+\left(y_1\right)^2}$ $\Rightarrow$ Booglengte is fnInt (y_2 , x , 0 , 4) $\approx 6{,}392$

$\Rightarrow$ Totale omtrek is dan $6{,}392 + 2e^{-1} + 4 + 2e \approx 16{,}56$

c. $f(0) = 2e^1 = 2e$ en $f(4) = 2e^{-1}$

We hebben te maken met een wenteling van een rechthoek en de functie *f*.

$I(K) = \pi \cdot 4^2 \cdot 2e^{-1} + \int_{2e^{-1}}^{2e} \pi x^2 dy$ Eerst apart :

$y = 2e^{1-0,5x} \Leftrightarrow e^{1-0,5x} = 0{,}5y \Leftrightarrow 1 - 0{,}5x = \ln(0{,}5y) \Leftrightarrow -0{,}5x = \ln(0{,}5y) - 1$ $\Rightarrow$

$\Leftrightarrow x = 2 - 2\ln(0{,}5y)$

$I(K) = 36{,}983 + \int_{2e^{-1}}^{2e} \pi x^2 dy = 36{,}983 + \int_{2e^{-1}}^{2e} \pi\left(2 - 2\ln(0{,}5y)\right)^2 dy$

$= 36{,}983 + 44{,}178 \approx 81{,}16$

De uitkomst van de 2e integraal vinden we door in te voeren : $y_1 = \pi\left(2 - 2\ln(0{,}5x)\right)^2$. Met de optie integraal uit het calc-menu vinden we de waarde van de integraal.